★

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1) Déterminer le réel c tel que f est une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire dont la densité est f, montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

★

Exercice 2

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X.
2) Déterminer une densité f de X.
3) Justifier que X admet une espérance et une variance (on ne demande pas de les calculer).

★

Exercice 3

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{a}{x^4} & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$.

1) Déterminer l'unique valeur de a telle que f est la fonction de densité d'une variable aléatoire X.
2) Déterminer si X admet une espérance et une variance et les calculer le cas échéant.

★

Exercice 4

Soit c un réel strictement positif et f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^{-4} & \text{si } x \notin [-1;1] \\ c & \text{si } x \in [-1;1] \end{cases}$.

1) Déterminer l'unique valeur de c telle que f est la fonction de densité d'une variable aléatoire X.
2) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
3) Déterminer l'ensemble des valeurs de $r \in \mathbb{N}^*$ telles que X admet un moment d'ordre r.

★

Exercice 5

Soient $a < b$ deux réels et soit X une variable à densité suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.

1) Retrouver par le calcul $E(X)$ et $V(X)$
2) On note $\sigma = \sqrt{V(X)}$. Vérifier que $E(X) - \sigma$ et $E(X) + \sigma$ sont dans l'intervalle $[a;b]$.
3) Montrer que $P(|X - E(X)| \leq \sigma) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

★

Exercice 6

Soient $\lambda > 0$ un réel et soit X une variable à densité suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1) Rappeler la fonction de densité de X en redémontrant que c'est bien une densité.
2) Retrouver la fonction de répartition de X
3) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
4) On pose $Y = \mathrm{e}^{-X}$ et on admet que Y est une variable à densité. Déterminer la loi suivie par Y.

★

Exercice 7

(Loi de Laplace) Soit $c > 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{c}{2}\mathrm{e}^{-c|x|}$

1) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle X.
2) Déterminer la fonction de répartition F de X
3) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n
5) En déduire que X admet une variance et la calculer.

★

Exercice 8

Soit c un réel strictement positif et f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^{-4} & \text{si } x \notin [-1;1] \\ c & \text{si } x \in [-1;1] \end{cases}$.

1) Déterminer l'unique valeur de c telle que f est la fonction de densité d'une variable aléatoire X.
2) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
3) Déterminer l'ensemble des valeurs de $r \in \mathbb{N}^*$ telles que X admet un moment d'ordre r.

★

Exercice 9

(Loi β de première espèce) Pour tous réels a et b, on note, sous réserve d'existence : $I(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$

1) Montrer que $I(a,b)$ existe si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.
2) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $bI(a+1,b) = aI(a,b+1)$ et $I(a,b+1) + I(a+1,b) = I(a,b)$.
   En déduire $I(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b} I(a,b)$.
3) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{I(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} & \text{si } t \in]0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle X.
4) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

★

Exercice 10

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$ et λ un réel strictement positif. On considère la variable $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

1) Calculer $P(V \leq x)$ pour tout réel x.
2) En déduire que V est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de V

★

Exercice 11

(Loi de Cauchy) Soit $\alpha > 0$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \alpha \cdot \arctan(x) + \dfrac{1}{2}$.

1) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Préciser sa densité f.
2) Montrer que X n'admet ni espérance, ni variance.
3) Déterminer la loi de $Z = \dfrac{1}{X}$.